Übungsklausur für Mathematik 13.1

(V e k t o r r e c h n u n g)

Schwierigkeitsgrad:

Aufgaben 1 – 7: Sehr leicht
Aufgaben 8 – 11: Standart
Aufgabe 11: Schwer
Aufgabe 12 - 13: Sehr schwer

1. Berechne bitte folgende Aufgaben:
   a) [4|8] + [6|2] b) [12|3] – [5|19] c) 4 * [12|3]
   d) 3 * [5|2|1] + [2|8|-3] e) [12|18|30] / 6 + 5* [5|10|1]
2. Berechne die Länge der gegebenen Vektoren:
   a)[4|3] b) [5|12|8] c) [10|3|4]
3. Sind die folgenden beiden Dreiecke ABC gleichschenklig, gleichseitig oder keins von beiden?
   a)A = (1 | 2 | 3) B = (4 | 2 | 7) C = (0 | 5 | 7)
   b)A = (4 | 5 | 6) B = (7 | 3 | 4) C = (7 | 4 | 5)
4. Bestimme, wenn möglich, c so, dass die Entfernung zu dem Punkt A genau 3 ist. Wie viele Lösungen gibt es jeweils für c? Kannst du erklären warum?
   a)A = (4 | 4 | 4) $\vec{b}$ = (4 | 4 | c)
   b)A = (5 | 3 | 1) $\vec{b}$ = (1 | c | 0)
   c)A = (3 | 4 | 9) $\vec{b}$ = (c | 4 | 6)
5. Stelle den Vektor d mit den Vektoren a, b und c dar.
   a)a = [1|2|3] $\vec{b}$ = [4|0|0] $\vec{c}$ = [5|3|2] $\vec{d}$ = [16|12|1]
   b)a = [3|3|1] $\vec{b}$ = [2|7|1] $\vec{c}$ = [4|0|1] $\vec{d}$ = [-5|15|0]
6. Bestimme den Mittelpunkt der Strecke AB.
   a)A = (4 | 5 | 6) B = (8 | 3 | 2)
   b)A = (7 | 9 | 2) B = (3 | 1 | 8)
   c)A = (13 | 6 | 1) B = (5| -4 | 1)
7. Sind die folgenden Vektoren linear unabhängig?
   a)$\vec{a}$ = [4|3|1] $\vec{b}$ = [6|2|0] $\vec{c}$ = [1|5|3]
   b)$\vec{a}$ = [5|2|2] $\vec{b}$ = [7|3|1] $\vec{c}$ = [9|4|0]
8. Gegeben ist das Dreieck A = (0 | 0 | 0); B = (5 | 3 | 8); C = (-1 | 5 | 2). Wie lauten die Geraden der drei Seiten und der drei Seitenhalbierenden? Wie lautet der Mittelpunkt?
9. Stelle bitte folgende Gleichung in Parameterform dar: f(x) = 3x – 6
10. Gegeben ist sie Strecke AB. A = (6 | 4 | 2); B = (7 | 6 | 5)
    a)Stelle die Strecke als Parametergleichung dar!
    b)Liegt der Punkt C (8 | 8 | 8) auf der Strecke?
11. Überprüfe, wie die folgenden Geraden zueinander liegen (orthogonal; paralel; windschief) wenn sie einen Schnittpunkt haben, so gebe auch diesen an:
    a)$\vec{g}$ = [4|3|7] + λ • [4|-1|2] $\vec{h}$ = [8|3|1] + μ • [2|3|0]
    b)$\vec{g}$ = [7|0|1] + λ • [2|1|4] $\vec{h}$ = [0|4|2] + μ • [6|3|12]
    c)$\vec{g}$ = [8|1|5] + λ • [2|3|1] $\vec{h}$ = [28|6|10] + μ • [8|2|2]
    d)$\vec{g}$ = [7|2|3] + λ • [4|-1|2] $\vec{h}$ = [6|2|9] + μ • [2|4|-2]
12. Überprüfe, ob sich die Diagonalen eines **Drachen** halbieren. Wende dabei den Satz für Linear unabhängige Vektoren an! (Ich konnte diese Aufgabe nicht lösen!)
13. Bestimme die Parameter der Gerade g so, dass die senkrecht auf die Ebene e trifft!
    $\vec{g}$ = [3|4|7] + λ • [10|p_1|p_2]
    $\vec{e}$ = [8|1|12] + μ • [8|4|2] + v • [6|3|9]

Lösungen

Nr. 1

a) [10|10] b) [7|-16] c) [48|12] d) [17|18|0] e) [27|53|10]

Nr. 2

a) 5 b) 15 c)11,18

Nr. 3

a) |AB| = 5 |AC| = 5,099 |BC| = 5 → Gleichschenklig
b) |AB| = 4,123 |AC| = 3,317 |BC| = 1,414 → keins von beiden

Nr. 4

a) 2 Lösungen: c = 1 v c = 7
b) keine Lösung
c) eine Lösung: c = 3
Begründung: Ein Vektor mit einem Parameter ist eine Gerade. Alle Punkte, die genau 3 von einem anderen Punkt entfernt sind, ergeben eine Kugel. Man kann sich jetzt vorstellen, dass die Gerade die Kugel schneidet, dann gibt es zwei Lösungen oder sie berührt, dann gibt es eine Lösung oder an ihr vorbei geht, dann gibt es keine Lösung.

Nr. 5

a) d = -4,2a – 3,45b + 6,8c b) d = 5a - 5c

Nr. 6

a) M = (6 | 4 | 4) b) M = (5 | 5 | 5) c) M = (9 | 1 | 1)
Achtung! Gefragt waren die Mittelpunkte, nicht die Ortsvektoren der Mittelpunkte. Für so etwas gibt es in der Klausur Punktabzug.

Nr. 7

a) Ja b) Nein

Nr. 8

g_{AB} = λ • [5|3|8] g_{AC} = λ • [-1|5|2] g_{BC} = [5|3|8] + λ • [6|-2|6]
g_{CMAB} = [2,5|1,5|4] + λ • [-3,5|3,5|-2] g_{BMAC} = [-0,5|2,5|1] + λ • [4,5|0,5|7]
g_{AMBC} = λ • [2|4|5] M = (2 | 4 | 5)

Nr. 9

g = [0|-6] + λ • [1|3]

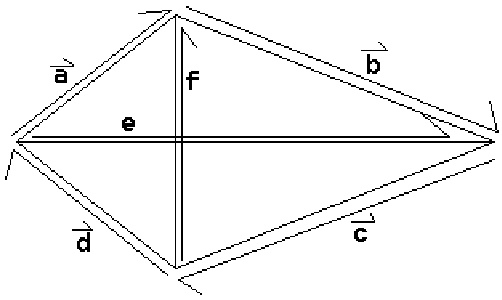
Nr. 10

a) s = [6|4|2] + λ • [1|2|3] ^ 0 ≤ λ ≤ 1
b) Der Punkt liegt **nicht** auf der Strecke. Wenn man die Koordinaten einsetzt kommt für λ 2 heraus. Dadurch ist die Bedingung 0 ≤ λ ≤ 1 nicht erfüllt.

Nr. 11

a) Die beiden Geraden liegen windschief zueinander und haben keinen Schnittpunkt.
b) Die beiden Geraden liegen paralel, aber nicht aufeinander.
c) Die beiden Geraden liegen windschief zueinander und haben einen Schnittpunkt.
S = (8 | 1 | 5)
d) Die beiden Geraden liegen orthogonal zueinander und haben keinen Schnittpunkt.

Nr. 12



Es sieht so aus, als hätte ich mich beim Stellen dieser Aufgabe vertan. Ich bin bei der Aufgabe von dem Drachen rechts ausgegangen. Daraus ergibt sich:

$\lambda \bullet e + \mu \bullet f = a$; $\quad f = d + a$; $\quad e = a + b$

$\lambda \bullet (a+b) + \mu \bullet (d+a) = a$

$\lambda \bullet (a+b) + \mu \bullet (d+a) - a = 0$

$\lambda \bullet a + \lambda \bullet b + \mu \bullet d + \mu \bullet a - a = 0$

$a \bullet (\lambda+\mu-1) + b \bullet \lambda + d \bullet \mu = 0$

Nach dieser Gleichung müsste gelten:

$\lambda = 0$; $\quad \mu = 0 \quad \lambda + \mu - 1 = 0 \quad$ d.h. $0 + 0 - 1 = 0 \rightarrow$ FALSCH

Es kommt eine falsche Aussage heraus. Das ist klar: Wo ich die Formel für unabhängige Vektoren angewendet habe, waren noch 3 Vektoren vorhanden. Weil diese in einer Ebene liegen, können sie nicht linear unabhängig sein, also ist die Formel auch nicht gültig. Ich hätte den Drachen also mit maximal 2 Vektoren beschreiben dürfen, was mir aber nicht gelungen ist. Sollte es jemandem von euch gelingen, lasst es mich wissen!

Nr. 13

Eine weitere schwere, aber lösbare Aufgabe. Die Ebene wird zwischen den beiden Richtungsvektoren der Ebene [8|4|2] und [6|3|9] aufgespannt. D.h. wenn der Richtungsvektor der gerade orthogonal zu den beiden Richtungsvektoren der Ebene ist, steht die Gerade senkrecht auf der Ebene. Daraus folgt:

$[10|p_1|p_2] \bullet [8|4|2] = 0$ und $[10|p_1|p_2] \bullet [6|3|9] = 0$

$80 + 4p_1 + 2p_2 = 0$ $\quad 60 + 3p_1 + 9p_2 = 0$

$40 + 2p_1 + p_2 = 0$ $\quad 20 + p_1 + 3p_2 = 0$

$p_2 = -40 - 2p_1$

$20 + p_1 + 3 \bullet (-40 - 2p_1) = 0$ Einsetzen

$20 + p_1 - 120 - 6p_1 = 0$

$5p_1 = -100$

$\mathbf{p_1 = -20}$

$p_2 = -40 - 2 \bullet (-20)$

$p_2 = -40 + 40$

$\mathbf{p_2 = 0}$